



CENTRE D'ESTUDIS O INSTITUCIÓ

Departament de Matemàtiques

Treball de recerca

Dones Matemàtiques

Jordi Sorolla

Treball de recerca tutoritzat per

Nom del tutor

Data i lloc

Índex

1	María Gaetana Agnesi	1
1.1	Introducció	1
1.2	Parametrització de la corba d'Agnesi	2
1.2.1	Resultats previs	3
1.2.2	Càlcul de les coordenades de $P = (x, y)$	3
1.3	Expressió racional de la corba d'Agnesi	4
1.4	Anàlisi de la funció	4
1.4.1	Domini	4
1.4.2	Punts de tall amb els eixos	5
1.4.3	Extrems relatius	5
1.4.4	Punts d'inflexió	5
1.4.5	Asímtotes	5
1.4.6	Àrea sota la gràfica	5
1.4.7	Volum de revolució	6
1.4.8	Cas general	7
	Índex alfabètic	i

Capítol 1

María Gaetana Agnesi

1.1 Introducció

María Gaetana Agnesi (Milà, 16 de maig de 1718 - Milà, 9 de gener de 1799), vegeu [1] i [2], va rebre una bona formació acadèmica i ja parlava set llengües als tretze anys. Considerada la primera professora d'universitat, el 1746 publica el *Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*?, el que es considera el primer text complet de càlcul on dóna harmonia als treballs de Newton i Leibniz, i on tracta conjuntament el càlcul diferencial i integral.



Figura 1.1: María Gaetana Agnesi (Wikipedia)

En matemàtiques, la *corba d'Agnesi*, anomenada així en honor a Maria Agnesi, és la corba definida de la manera següent (vegeu la Figura 1.2):

- Considerem una circumferència de radi r que reposa sobre l'origen de coordenades O .
- Considerem un punt A sobre la circumferència.
- Tracem una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt M , oposat a O .
- Tracem la recta \overline{OA} i considerem el punt N on talla la recta anterior.
- Considerem el punt P on la recta horitzontal que passa per A talla la recta vertical que passa per N .
- Modificant la posició del punt A dins la circumferència, s'obté una trajectòria de punts $P = (x, y)$, que defineixen la corba d'Agnesi.

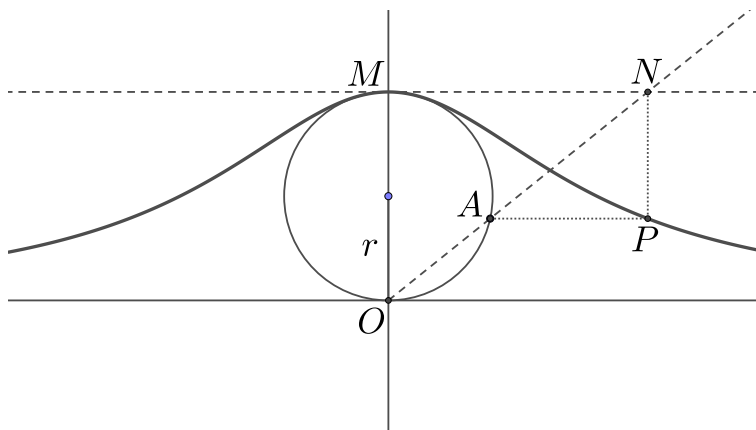


Figura 1.2: Construcció de la corba d'Agnesi

La corba d'Agnesi és una aproximació de la distribució de l'espectre de l'energia dels rajos X i dels rajos òptics, com també de la potència dissipada en els circuits d'alta freqüència de ressonància.

En la traducció de dels seus textos a l'anglès, es confón, potser de forma deliberada, el terme *versiera* (girar) per *avversiera* (bruixa). D'aquí que s'hagi conegut la corba com a bruixa d'Agnesi.

1.2 Parametrització de la corba d'Agnesi

Parametritzar una corba consisteix a determinar com varien les coordenades d'un punt de la corba $P = (x, y)$ en funció d'un paràmetre. En el cas de la corba d'Agnesi, determinem els valors de x i y en funció de l'angle θ , que és l'angle d'inclinació de la recta \overline{OA} . Vegeu la Figura 1.3.

1.2.1 Resultats previs

1. El triangle $\triangle OAM$ és rectangle en A ja que el punt A pertany a la circumferència i l'angle en aquest punt abraça tot el diàmetre.
2. Podem prendre l'angle θ i, fent un moviment rígid, veiem que encaixa perfectament en el triangle $\triangle OAM$ en el punt M . De manera que l'angle en M és també θ .

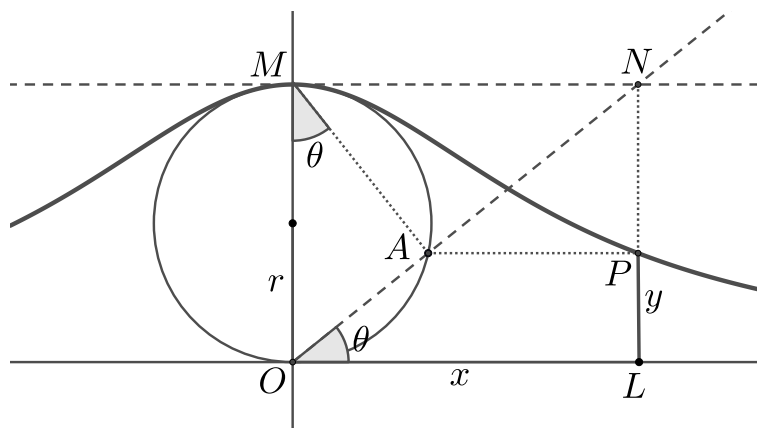


Figura 1.3: Parametrització de la corba d'Agnesi

1.2.2 Càlcul de les coordenades de $P = (x, y)$

Primerament, utilitzant trigonometria i fixant-nos en l'angle θ inferior de la Figura 1.3, està clar que, d'una banda,

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|ON|} \Rightarrow x = |ON| \cos(\theta), \quad (1.1)$$

i de l'altra

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|OA|} \Rightarrow y = |OA| \sin(\theta). \quad (1.2)$$

En segon lloc, i també fixant-nos en l'angle θ inferior, veiem que

$$\sin(\theta) = \frac{|LN|}{|ON|} = \frac{|2r|}{|ON|} \Rightarrow |ON| = \frac{2r}{\sin(\theta)}, \quad (1.3)$$

però si ens fixem en l'angle θ superior (recordem que el triangle $\triangle OAM$ és rectangle),

$$\sin(\theta) = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{|OA|}{2r} \Rightarrow |OA| = 2r \sin(\theta). \quad (1.4)$$

Ara, de (1) i (3) obtenim que

$$x = |ON| \cos(\theta) = \frac{2r}{\sin(\theta)} \cos(\theta) = \frac{2r \cos(\theta)}{\sin(\theta)},$$

i de (2) i (4) queda

$$y = |OA| \sin(\theta) = y = 2r \sin(\theta) \sin(\theta) = 2r \sin^2(\theta).$$

Concloem doncs que la parametrització dels punts $P = (x, y)$ ve donada per

$$(x, y) = \left(\frac{2r \cos(\theta)}{\sin(\theta)}, 2r \sin^2(\theta) \right).$$

1.3 Expressió racional de la corba d'Agnesi

A partir de la parametrització obtinguda, està clar que

$$\sin^2(\theta) = \frac{y}{2r}, \quad (1.5)$$

i també que

$$x^2 = \frac{4r^2 \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{4r^2 (1 - \sin^2(\theta))}{\sin^2(\theta)}.$$

Si substituïm en aquesta darrera identitat el valor de $\sin^2(\theta)$ pel que tenim en (5), queda que

$$x^2 = \frac{4r^2 \left(1 - \frac{y}{2r}\right)}{\frac{y}{2r}} = \frac{8r^3}{y} \left(1 - \frac{y}{2r}\right) = \frac{8r^3}{y} - 4r^2 = \frac{8r^3 - 4r^2 y}{y}.$$

Per tant,

$$x^2 y = 8r^3 - 4r^2 y \Rightarrow x^2 y + 4r^2 y = 8r^3 \Rightarrow y(x^2 + 4r^2) = 8r^3 \Rightarrow y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}.$$

En el cas particular que $r = 1/2$,

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1.4 Anàlisi de la funció

En aquest apartat es fa un estudi de la funció real que té per gràfica la corba d'Agnesi en el cas particular $r = 1/2$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

tot i que els càlculs són extrapol·lables a qualsevol valor de r .

1.4.1 Domini

En tant que el denominador és sempre positiu, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. De manera que la funció serà contínua arreu.

1.4.2 Punts de tall amb els eixos

La funció talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, 1)$, doncs $f(0) = 1$.

No talla l'eix d'abscisses ja que $f(x) = 0$ no té solució.

1.4.3 Extremes relatius

Tenint en compte que la derivada ve donada per

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2},$$

i que s'anul·la quan $x = 0$, l'únic extrem relatiu estarà en el punt $(0, 1)$ (ja era un punt de tall). A més serà un màxim relatiu perquè $f'(x) < 0$ (creixent) per a $x < 0$ i $f'(x) > 0$ (decreixent) per a $x > 0$. Per tant, es tracta també d'un extrem absolut.

1.4.4 Punts d'inflexió

La segona derivada és

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1)^2 - 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2(x^2 + 1) - 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3},$$

i que s'anul·la quan $-6x^2 + 2$, és a dir, quan $x = \pm 1/\sqrt{3}$. En ambdòs casos, $y = 3/4$.

Tenint en compte que $f''(x) > 0$ (còncava) per a $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ i $f''(x) < 0$ (convexa) per a $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, està clar que $f(x)$ presenta punts d'inflexió en $(\pm 1/\sqrt{3}, 3/4)$.

1.4.5 Asímptotes

La funció no té asímptotes verticals perquè és contínua, però té una asímptota horitzontal en $y = 0$ ja que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

1.4.6 Àrea sota la gràfica

L'àrea ve donada per la integral impròpia

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow \infty} (\arctan(a) - \arctan(-a)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

i és exactament quatre vegades l'àrea de la circumferència utilitzada per definir la corba d'Agnesi en el cas $r = 1/2$.

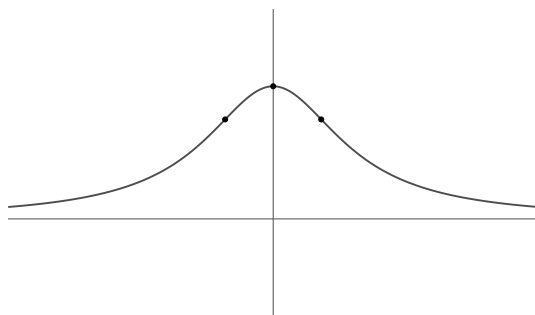


Figura 1.4: Gràfica de la funció

1.4.7 Volum de revolució

El volum de revolució al voltant de l'eix d'abscisses es calcula mitjançant la integral

$$\mathcal{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \pi f^2(x) dx = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} (F(a) - F(-a)),$$

on

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Per al càlcul d'aquesta primitiva, fem el canvi de variable $x = \tan(t)$, de manera que $dx = (1 + \tan^2(t)) dt$. Així,

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{1 + \tan^2(t)}{(\tan^2(t) + 1)^2} dt = \int \frac{1}{(\tan^2(t) + 1)} dt = \int \frac{1}{\sec^2(t)} dt = \int \cos^2(t) dt.$$

A continuació, utilitzant la identitat trigonomètrica del cosinus de l'angle meitat, la primitiva esdevé

$$F(x) = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int 2 \cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t).$$

I desferent el canvi queda

$$F(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(x)).$$

Tenint en compte que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan(a) + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(a)) \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin\left(2 \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

i que, anàlogament

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(-a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan(-a) + \frac{1}{4} \sin(2 \arctan(-a)) \right) = \frac{1}{2} \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin\left(2 \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{4},$$

El volum resulta

$$\mathcal{V} = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} (F(a) - F(-a)) = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

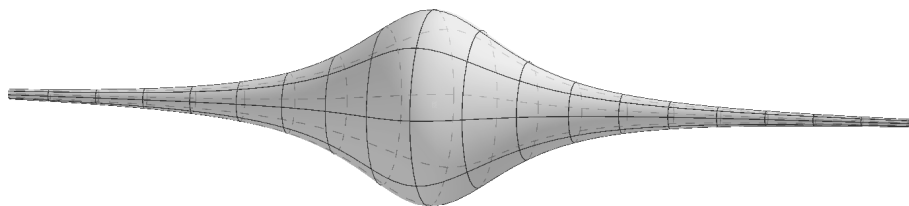


Figura 1.5: Volum de rotació

1.4.8 Cas general

En el cas que la corba d'Agnesi vingui generada per una circumferència de radi arbitrari r , la funció vindrà donada per

$$f(x) = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2},$$

i mitjançant càlculs anàlegs en funció del paràmetre r , s'obtindrà que el màxim relatiu i punt de tall amb l'eix d'ordenades corresponen al punt $(0, 2r)$, mentre que $(\pm 2r/\sqrt{3}, 3r/2)$ són les coordenades dels punts d'inflexió.

A més, l'àrea sota la corba ve donada per $\mathcal{A} = 4\pi r^2$, i el volum de rotació per $\mathcal{V} = 4\pi^2 r^3$.

Bibliografia

- [1] Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi
- [2] Mujeres con ciencia. <https://mujeresconciencia.com/2017/07/11/maria-gaetana-agnesi-1718-1799/>
- [3] Maria Gaetana Agnesi. *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana di d.na Maria Gaetana Agnesi milanese dell'Accademia delle Scienze di Bologna. Tomo 1. 2.* 1746.
- [4] Isaac Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica.*
- [5] Leibniz Gottfried Wilhelm. *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, item que tangentibus.*

Índex alfabètic

asíptota

horitzontal, 5

vertical, 5

corba d'Agnesi, 2

domini, 4

extrem

absolut, 5

relatiu, 5

integral impròpia, 5, 6

parametrització, 2

punt d'inflexió, 5