eMathtimes
Where Maths live. Don't you?

La corba d'Agnesi

per J. Sorolla

Resum

La voluntat d'aquest article és fer una aproximació a la matemàtica María Gaetana Agnesi i estudiar una de les seves aportacions, des del punt de vista del currículum de Batxillerat. Inclou conceptes de trigonometria, geometria, càlcul diferencial i càlcul integral.

1 Introducció

María Gaetana Agnesi (Milà, 16 de maig de 1718 - Milà, 9 de gener de 1799) va rebre una bona formació acadèmica i ja parlava set llengües als tretze anys. Considerada la primera professora d'universitat, el 1746 publica el *Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*, el que es considera el primer text complet de càlcul on dóna armonia als treballs de Newton i Leibniz, i on tracta conjuntament el càlcul diferencial i integral.

Figura 1: María Gaetana Agnesi (Wikipedia)

En matemàtiques, la *corba d'Agnesi*, anomenada així en honor a Maria Agnesi, és la corba definida de la manera següent (vegeu la Figura 2):

- Considerem una circumferència de radi r que reposa sobre l'origen de coordenades O.
- Considerem un punt A sobre la circumferència.
- Tracem una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt M, oposat a O.
- Tracem la recta $\overline{OA}$ i considerem el punt N on talla la recta anterior.
- Considerem el punt P on la recta horitzontal que passa per A talla la recta vertical que passa per N.
- Modificant la posició del punt A dins la circumferència, s'obté una trajectòria de punts $P = (x, y)$, que defineixen la corba d'Agnesi.

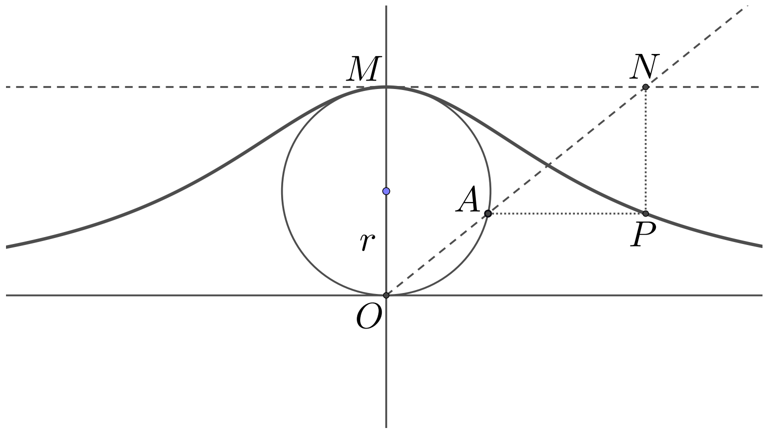

Figura 2: Construcció de la corba d'Agnesi

La corba d'Agnesi és una aproximació de la distribució de l'espectre de l'energia dels rajos X i dels rajos òptics, com també de la potència disipada en els circuits d'alta freqüència de ressonància.

En la traducció de dels seus textos a l'anglès, es confón, potser de forma deliverada, el terme *versiera* (girar) per *avversiera* (bruixa). D'aquí que s'hagi conegut la corba com a bruixa d'Agnesi.

2 Parametrització de la corba d'Agnesi

Parametritzar una corba consisteix a determinar com varien les coordenades d'un punt de la corba $P = (x, y)$ en funció d'un paràmetre. En el cas de la corba d'Agnesi, determinem els valors de x i y en funció de l'angle θ, que és l'angle d'inclinació de la recta $\overline{OA}$. Vegeu la Figura 3.

2.1 Resultats previs

1. El triangle $\triangle OAM$ és rectangle en A ja que el punt A pertany a la circumferència i l'angle en aquest punt abraça tot el diàmetre.

2. Podem prendre l'angle θ i, fent un moviment rígid, veiem que encaixa perfectament en el triangle $\triangle OAM$ en el punt M. De manera que l'angle en M és també θ.

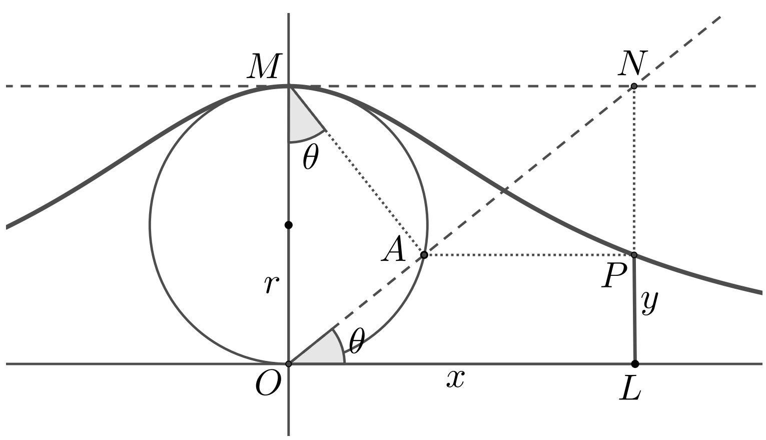

Figura 3: Parametrització de la corba d'Agnesi

2.2 Càlcul de les coordenades de $P = (x, y)$

Primerament, utilitzant trigonometria i fixant-nos en l'angle θ inferior de la Figura 3, està clar que, d'una banda,

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|ON|} \Rightarrow x = |ON| \cos(\theta), \tag{1}$$

i de l'altra

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|OA|} \Rightarrow y = |OA|\sin(\theta). \tag{2}$$

En segon lloc, i també fixant-nos en l'angle θ inferior, veiem que

$$\sin(\theta) = \frac{|LN|}{|ON|} = \frac{|2r|}{|ON|} \Rightarrow |ON| = \frac{2r}{\sin(\theta)}, \tag{3}$$

però si ens fixem en l'angle θ superior (recordem que el triangle $\triangle OAM$ és rectangle),

$$\sin(\theta) = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{|OA|}{|2r|} \Rightarrow |OA| = 2r\sin(\theta). \tag{4}$$

Ara, de (1) i (3) obtenim que

$$x = |ON|\cos(\theta) = \frac{2r}{\sin(\theta)}\cos(\theta) = \frac{2r\cos(\theta)}{\sin(\theta)},$$

i de (2) i (4) queda

$$y = |OA|\sin(\theta) = y = 2r\sin(\theta)\sin(\theta) = 2r\sin^2(\theta).$$

Concloem doncs que la parametrització dels punts $P = (x, y)$ ve donada per

$$(x, y) = \left(\frac{2r\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, 2r\sin^2(\theta)\right).$$

3 Expressió racional de la corba d'Agnesi

A partir de la parametrització obtinguda, està clar que

$$\sin^2(\theta) = \frac{y}{2r}, \tag{5}$$

i també que

$$x^2 = \frac{4r^2\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{4r^2\left(1 - \sin^2(\theta)\right)}{\sin^2(\theta)}.$$

Si substituïm en aquesta darrera identitat el valor de $\sin^2(\theta)$ pel que tenim en (5), queda que

$$x^2 = \frac{4r^2\left(1 - \frac{y}{2r}\right)}{\frac{y}{2r}} = \frac{8r^3}{y}\left(1 - \frac{y}{2r}\right) = \frac{8r^3}{y} - 4r^2 = \frac{8r^3 - 4r^2y}{y}.$$

Per tant,

$$x^2y = 8r^3 - 4r^2y \Rightarrow x^2y + 4r^2y = 8r^3 \Rightarrow y(x^2 + 4r^2) = 8r^3 \Rightarrow y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}.$$

En el cas particular que $r = 1/2$,

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

4 Anàlisi de la funció

En aquest apartat es fa un estudi de la funció real que té per gràfica la corba d'Agnesi en el cas particular $r = 1/2$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

tot i que els càlculs són extrapol·lables a qualsevol valor de r.

4.1 Domini

En tant que el denominador és sempre positiu, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. De manera que la funció serà contínua arreu.

4.2 Punts de tall amb els eixos

La funció talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, 1)$, doncs $f(0) = 1$.

No talla l'eix d'abscisses ja que $f(x) = 0$ no té solució.

4.3 Extrems relatius

Tenint en compte que la derivada ve donada per

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

i que s'anul·la quan $x = 0$, l'únic extrem relatiu estarà en el punt $(0,1)$ (ja era un punt de tall). A més serà un màxim relatiu perquè $f'(x) < 0$ (creixent) per a $x < 0$ i $f'(x) > 0$ (decreixent) per a $x > 0$.

4.4 Punts d'inflexió

La segona derivada és

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3},$$

i que s'anul·la quan $-6x^2 + 2$, és a dir, quan $x = \pm 1/\sqrt{3}$. En ambdós casos, $y = 3/4$.

Tenint en compte que $f''(x) > 0$ (còncava) per a $x \in \left(-\infty, -1/\sqrt{3}\right) \bigcup \left(1/\sqrt{3}, \infty\right)$ i $f''(x) > 0$ (convexa) per a $x \in \left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$, està clar que $f(x)$ presenta punts d'inflexió en $(\pm 1/\sqrt{3}, 3/4)$.

4.5 Asímptotes

La funció no té asímptotes verticals perquè és contínua, però té una asímptota horitzontal en $y = 0$ ja que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

4.6 Àrea sota la gràfica

L'àrea ve donada per la integral impròpia

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to \infty} (\arctan(a) - \arctan(-a)) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi,$$

i és exactament quatre vegades l'àrea de la circumferència utilitzada per definir la corba d'Agnesi en el cas $r = 1/2$.

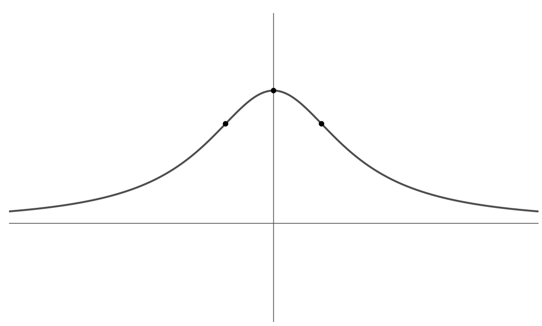

Figura 4: Gràfica de la funció

4.7 Volum de revolució

El volum de revolució al voltant de l'eix d'abscisses es calcula mitjançant la integral

$$\mathcal{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \pi f^2(x)dx = \pi \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi \lim_{a \to \infty} \left(F(a) - F(-a)\right),$$

on

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Per al càlcul d'aquesta primitiva, fem el canvi de variable $x = \tan(t)$, de manera que $dx = \left(1 + \tan^2(t)\right) dt$. Així,

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+\tan^2(t)}{(\tan^2(t)+1)^2} dt = \int \frac{1}{(\tan^2(t)+1)} dt = \int \frac{1}{\sec^2(t)} dt = \int \cos^2(t) dt.$$

A continuació, utilitzant la identitat trigonomètrica del cosinus de l'angle meitat, la primitiva esdevé

$$F(x) = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int 2\cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t).$$

I desfent el canvi queda

$$F(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4} \sin\left(2\arctan(x)\right).$$

Tenint en compte que

$$\lim_{a\to\infty} F(a) = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} \arctan(a) + \frac{1}{4} \sin\left(2\arctan(a)\right) \right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

i que, anàlogament

$$\lim_{a\to\infty} F(-a) = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} \arctan(-a) + \frac{1}{4} \sin\left(2\arctan(-a)\right) \right) = \frac{1}{2}\frac{-\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin\left(2\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{4},$$

El volum resulta

$$\mathcal{V} = \pi \lim_{a\to\infty} \left(F(a) - F(-a)\right) = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

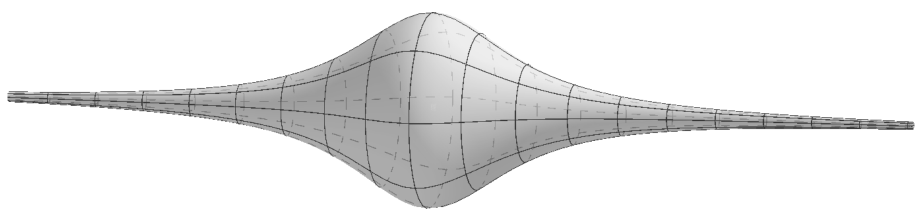

Figura 5: Volum de rotació

4.8 Cas general

En el cas que la corba d'Agnesi vingui generada per una circumferència de radi arbitrari r, la funció vindrà donada per

$$f(x) = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2},$$

i mitjançant càlculs anàlegs en funció del paràmetre r, s'obtindrà que el màxim relatiu i punt de tall amb l'eix d'ordenades corresponen al punt $(0, 2r)$, mentre que $\left(\pm 2r/\sqrt{3}, 3r/2\right)$ són les coordenades dels punts d'inflexió.

A més, l'àrea sota la corba ve donada per $\mathcal{A} = 4\pi r^2$, i el volum de rotació per $\mathcal{V} = 4\pi^2 r^3$.